600. *locally bicompact* ナ *topological group* ノ連續表現

吉田　耕作（阪大）

前ニ談話 383, 388, 446, 456 ニ於テ次ノ結果ヲ得マシタ。

定理：　距離付ケラレタ環 R ニ横ハル群 $\mathfrak{D}$ デ *locally bicompact* 且ツ *connected* ナ *topological group* $\mathcal{G}$ ヲ連続表現スレバ $\mathfrak{D}$ ハ *Lie* 表現デアル。

$\mathfrak{D}$ ガ *Lie* 表現ト云フノハ（談話 383 参照），R = *real number* ヲ係数トシテ一次独立ナ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$

ガアッテ之ノ real number ニヨル一次結合ノ全体ヲ $\mathfrak{T}$ トスレバ

1) $a \in \mathfrak{G}$ ガ充分 $\mathfrak{G}$ ノ単位 e ニ近ケレバ $D(a) \in \mathfrak{D}$ ハ $\exp. \mathfrak{U}$ ト表ハサレル。

コヽニ $\mathfrak{U} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathfrak{U}_i \in \mathfrak{T}$ ニシテ且ツ $a \to e$ ノトキ

$$\sum_{i=1}^{r} |\alpha_i| \to 0$$

2) 任意ノ $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ニ對シテ $\exp. \mathfrak{U} \in \mathfrak{D}$.

3) $\mathfrak{D}$ ノ任意ノ要素ハ $\exp. \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ノ如キ $\mathfrak{D}$ ノ要素有限コノ積トシテ表ハサレル。ココニ $\mathfrak{U}$ ハ如何程デモ O ニ近クトレル。

即チ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space デアッタガ，之ガ Lie-ring ナルコト；$\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathfrak{T}$ ト共ニ $(\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}) \in \mathfrak{T}$; ハ未ダ証明シナカッタ。

所ガ $\mathfrak{T}$ ガ Lie-ring ナルコトモ次ノ如ク容易ニ証明デキマス。

先ニ（談話 280, 291, 298）ニ於テ，R ニ横ハル群 $\mathfrak{D}$ ガ Lie 群ニナルタメノ必充條件ハ $\mathfrak{D}$ ガ locally compact 且ツ connected ナコトデアルコトヲ示シマシタガ，之レモ上ノ結果カラ corollary トシテ得ラレマス。即チ $\mathfrak{D}$ ヲ $\mathfrak{D}$ 自身ノ連續表現ト考ヘレバヨロシイ。（距離空間デハ compact ト bicompact トハ一致スル）

尚上述ノ定理ハ談話 383—456 ニ於イテハ locally

compactトナツテヲリマスガ之レヲ locally bicompact ト改メマシタ。ソレハ $\mathfrak{G}$ ト共ニ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ガ l.c. ニナルトイフコトヲ使ツテヲリマス（談話383）ガ之ガ云ヘル爲ニ l.b. ト改メタ次第デス。

補証明. 談話383ニ示シタ如ク $\mathfrak{D}$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ連続同型ナ場合ダケヤレバ充分デスカラ $a \longrightarrow D(a)$ ヲ同型對應ト假定シマス。

<u>$\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathfrak{T}$ トシ $\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U} \neq 0$ ノトキニ $\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ヲ示ス。</u>

$\mathfrak{T}$ ノ element ノ定義ニヨリ，$\mathfrak{G}$ 内ノ one-parameter continuous subgroup $a(t)$, $b(t)$ ガアリ

$$D(a(t)) = \exp. t\mathfrak{U}, \quad D(b(t)) = \exp. t\mathfrak{V}.$$

ココニ $a(t)a(s) = a(t+s)$, $a(0) = e$,

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = a(t_0)$$

（b ニツイテモ同様）デアルガ parameter t ヲ適當ニトツテヲイテ

$$\begin{cases} a(t) \in \mathfrak{V}, \quad b(t) \in \mathfrak{V}, \quad -1 \leqq t \leqq 1 \\ \mathfrak{V} \text{ ハ } \mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{-1} \text{ ナル如キ } e \text{ ノ近傍} \end{cases}$$

ト假定シテイテ差支ヘナイ。（$a(t)$ ノ代リニ $a(\alpha t)$ ヲトリ α ヲ充分大キクトレバヨイ）。

ココニ於イテ

$$c_n = a\left(\frac{1}{n}\right) b\left(\frac{1}{n}\right) a\left(\frac{-1}{n}\right) b\left(\frac{-1}{n}\right)$$

ト置クト n ガ充分大キイ所デハ $c_n \neq e$.

何者，若シ然ラズトスレバ

$$a\left(\frac{1}{n}\right)b\left(\frac{1}{n}\right)=b\left(\frac{1}{n}\right)a\left(\frac{1}{n}\right)$$

即チ
$$\exp\frac{U}{n}\exp\frac{V}{n}=\exp\frac{V}{n}\exp\frac{U}{n}$$

ナル如キ n ガ無限ニ多クナケレバナラナイ。所ガ

$$\exp\frac{U}{n}\exp\frac{V}{n}=E+\frac{1}{n}(U+V)$$
$$+\frac{1}{n^2}(U^2+2UV+V^2)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

（E ハ $\mathfrak{V}$ ノ単位）ナルコトガ直グワカルカラ $UV=VU$ ヲ得テ不合理デアル。

故ニ始メカラ $C_n \neq e$；$n=1, 2, \cdots\cdots$ トシテヲク。$\mathfrak{V}$ ハ $l.\ b.$ ダカラ V ヲ充分小サクトッテ V ノ閉被 $\overline{V}$ ガ *bicompact* 且ツ

$$|D(a)-E|<1 \qquad for \quad a\in\overline{V}$$

トシテ置ク。

$\mathfrak{G}$ ハ *arbitrarily small cyclic subgroup* ヲ含マナイ（談話383）カラ各 C_n ニ對シテ

$$\begin{cases} C_n^m \in \overline{V} & for \quad m=0, \pm 1, \cdots\cdots, \pm l_n \\ C_n^{\pm(l_n+1)} \overline{\in} \overline{V}(e) \end{cases}$$

ナル如キ正整数 l_n ガ撰ベル。$\min.(l_n, n^2)=m_n$ ト置ク。$\frac{m_n}{n^2}$ ハ 1 ヨリ大キクナイ正数デアリ，且ツ $\overline{V}$ ハ *bicompact* デ第一可附番公理ガ $\mathfrak{G}$ デ満足サレルカラ（談話456）

$$\lim_{n'\to\infty} \frac{m_{n'}}{(n')^2} = t_0, \quad 0 \leq t_0 \leqq 1$$

$$\lim_{n'\to\infty} C_{n'}^{m_{n'}} = C \in \overline{\overline{\nabla}}$$

ナル如キ整数列 $\{n'\}$ が存在スル。

故ニ $\displaystyle \lim_{n'\to\infty} D(C_{n'})^{m_{n'}} = \lim_{n'\to\infty} D\left(C_{n'}^{m_{n'}}\right) = D(C).$

従ツテ談話383ト同様ニシテ

$$\lim_{n'\to\infty} m_{n'}\{D(C_{n'})-E\} = \lim_{n'\to\infty} m_{n'}\, ln D(C_{n'})$$

$$= \lim_{n'\to\infty} ln\{D(C_{n'})^{m_{n'}}\}$$

$$= ln\, D(C)$$

ヲ得ル。所が

$$m_{n'}\{D(C_{n'})-E\} = m_{n'}\Big\{D\Big(a\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)D\Big(b\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)$$

$$-D\Big(b\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)D\Big(a\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)\Big\}D\Big(a\Big(\frac{-1}{n'}\Big)\Big)D\Big(b\Big(\frac{-1}{n'}\Big)\Big)$$

デアリ

$$\lim_{n'\to\infty} D\Big(a\Big(\frac{-1}{n'}\Big)\Big)D\Big(b\Big(\frac{-1}{n'}\Big)\Big) = E$$

デアルカラ

$$ln D(C) = \lim_{n'\to\infty} m_{n'}\Big\{\Big[D\Big(a\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)-E\Big]\Big[D\Big(b\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)-E\Big]$$

$$-\Big[D\Big(b\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)-E\Big]\Big[D\Big(a\Big(\frac{1}{n'}\Big)\Big)-E\Big]\Big\}$$

此ノ右辺第一項ハ

$$\frac{m_{n'}}{(n')^2} n'\left[D\left(a\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right] n'\left[D\left(b\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right]$$

トナルガ，

$$n'\left[D\left(a\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right] \to \ln D(a(1)) = \mathfrak{U},$$

$$n'\left[D\left(b\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right] = \mathfrak{V}$$

ニナル（談話383）カラ結局

$$\ln D(c) = t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U})$$

ヲ得ル。

コヽニ $c \neq e$ 即チ $t_0 \neq 0$ デアル。何者，無限ニ多クノ n' ニ対シテ $m_{n'} = n'^2$ ナラ $t_0 = 1$ ダカラ文句ハナイ。若シアル n'_0 カラ先キノ n' ニ對シテ常ニ $m_{n'} < n'^2$ トスレバ之等ノ n' ニ對シテ $m_{n'} = l_{n'}$。故ニ

$$C_{n'}^{\pm(m_{n'}+1)} \in \overline{\overline{V}} \quad \text{for} \quad n' \geqq n'_0$$

然ラバ，V_1 ヲ以テ $V_1 = V_1^{-1}$ 且ツ $\overline{V_1}^2 \subseteqq V$ ナル如キ e ノ近傍トスルト $C_n^{m_{n'}} \in \overline{V}_1$.

ヨッテ　$c \neq e$　即チ　$t_0 \neq 0$.

$$\ln D(c) = t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U})$$

即チ　$D(c) = \exp(t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}))$　ト　$c_{n'} \to e$,

$C_{n'}^{m_{n'}} \to c \neq e$ トカラ $t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}) \in \mathfrak{T}$（談話383）。

然シテ $\mathfrak{T}$ ハ real linear space デ $t_0 \neq 0$ ダカラ　$\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$。　　　——以上——

之デ略々 definitive ナ結果ニ到達シタヤウニ思ヒ

マス。